

videos at you tube

<https://www.youtube.com/watch?v=MJIBkAcsyFs>

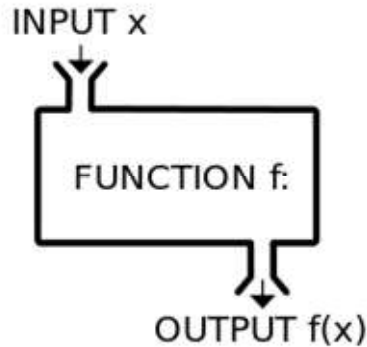
<https://www.khanacademy.org/math/linear-algebra/matrix-transformations/inverse-transformations/v/surjective-onto-and-injective-one-to-one-functions>

## Functions

### Function Definition

#### Fonksiyon nedir ?

Fonksiyon bir makineye benzetilebilir. Bir makine dışarıdan enerji alır ve ona karşılık bir iş yapar. Aşağıdaki şema, Wikipedia'dan alınmıştır ve fonksiyon-makine analogisini açıklamaktadır.



Bir ham deri boyama makinesini düşünelim.

Bu makineye ham deri girer, makinenin boyama, fiksaj, kurutma ve işlenmiş deri alanına makine çıktısı taşıma işlemini yürüttüğünü düşünelim. Ayrıntıya girmeden, bu makinenin, her makine gibi giren hammadeyi, değiştirdiği ve işlenmiş madde oluşturduğunu düşünelim. Makinelerin matematik simülasyonu, fonksiyon kavramıdır.

Matematikte bir fonksiyon özel bir ilişki tipi olarak düşünülür. Bu ilişki

tipi, bağımsız değişken(ler) den hareketle bağımlı değişkeni hesaplama olanağı sağlar.

f (bağımsız Değişken) = Fonksiyon Yazılımı (Bağımlı değişken)

olarak tanımlanır. Genel örnek olarak,

$$f(x) = 3x$$

bir fonksiyon örneğı olarak verilebilir. Çoęunlukla, basitleştirilmiş hali,

$$y = 3x$$

olarak kullanılır. Matematik fonksiyonlar da enerji harcar, karşılığında iş yapar. Yukarıdaki fonksiyon yazılımı, girdi alır ve aldığı girdiyi üç ile çarparak girdiden farklı bir çıktı oluşturur.

Fonksiyon tanımında f bir isimdir, f yerine örneğın, Aspendos (x) de denebilir. X bir yer tutucudur ve bağımsız değişkeninin ismidir. Eđer bağımsız değişken örnek olarak t ise, fonksiyon Aspendos (t) olarak tanımlanabilir.

Fonksiyon işlevini yapmak için, enerjiye gereksinim duyar. Bir değerin bir değerle çarpılması bir işi gerektirir. Bir emeğin karşılığı da bir iştir. Belirli bir zamanda yapılan bir iş de bir enerji dir. Eđer yüz tane girdiyi çıktıya virmek gerekiyorsa gerekli enerjiyi de bu fonksiyona sağlamalıyız. Bir fonksiyonun işlevini yapması için gereksinimi olan enerjiyi fonksiyonun yazılımı belirler. Yukarıdaki gibi basit bir fonksiyonun işlevini yapması için, az miktarda bir enerjiye gereksinime duyarken, daha karmaşık bir yazılımı olan bir fonksiyon daha çok enerjiye gereksinim duyar.

Günümüzde, akıllı olan birisi yüz tane girdiyi bir fonksiyon kullanarak el ile sonucunu hesaplamaz. Bunun için, bilgisayarlar kullanılır. Birazdan biz de öyle yapacağız. Bilgisayar çalıştırmak için elektrik enerjisine gerek duyar. Yazılımı basit bir fonksiyon aynı sayıda veriyi dönüştürmek için küçük bir elektrik sarfiyatına gerek duyarken daha karmaşık bir fonksiyon daha çok elektrik enerjisine gerek duyar.

Bir ilişkinin fonksiyon niteliğini kazanması için bazı koşulları sağlaması gerekir. Bunlar fonksiyon olabilme kriteriyumları olarak adlandırılır.

## Fonksiyon Olabilme Kriteriyumları

### Bir Enerjiye Gereksiniminin Olması

Fonksiyon olabilmesinin ilk koşulu, girdi ile çıktının aynı olmamasıdır. Bu kriteriyum,

$$f(x) = x$$

gibi bir ilişkinin fonksiyon olamayacağını göstergesidir. Bir fonksiyonun bir işlevi olur, bu işlevini yerine getirmek için de enerjiye gereksinimi olur. Oysa, tüm girdileri ve çıktıları aynı olan bir fonksiyon, girdisini bir şekilde değiştiremiyorsa, o fonksiyonun fonksiyonel bir işlevi olamaz. Böyle bir fonksiyon ne girdisini değiştirebilir, ne de bir enerjiye gereksinimi olur. Bu olsa olsa  $C = 12$  ( $C$  sembolü Costant = Sabit anlamında kullanılmaktadır) gibi sabit bir sayıdır.

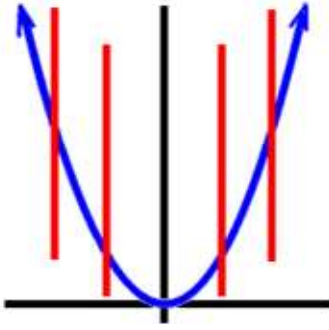
Fonksiyonlar makinelere benzer, bir işlevi olmayan makineye kimsenin gereksinimi yoktur.

### Yazılımının Düzenli Olması

Bir fonksiyon, bir veya aralarında belirli koşulları sağlayan birden çok girdiye karşın sadece bir tek çıktı vermelidir. Birçok-a-bir tipi bir ilişki fonksiyon oluşturabilir, fakat bire karşı birçok tipi bir ilişki bir fonksiyon oluşturamaz.

Bir ilişkinin fonksiyon olup olamamasının kriteriyumu dikey testi geçmesidir.

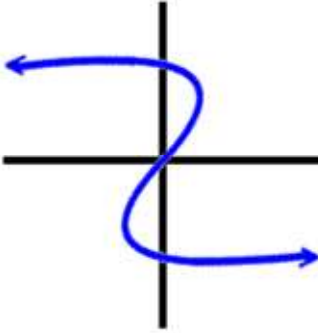
Bir fonksiyonun grafiği,  $y$  eksenine paralel bir çizgiyi sadece bir kez kesmelidir. bir kereden çok keserse, yani aynı  $x$  için, birden çok  $y$  değeri varsa, bu ilişki, fonksiyon değildir. Aşağıdaki grafiği inceleyiniz.



Bu grafik  $y = x^2$  olarak tanımlanan bir parabolün grafiğidir. Burada ordinat eksenine paralel olarak çizilen her doğru, fonksiyon tarafından sadece bir kez kesilir. Her  $x$  için bir tek  $y$  vardır. Ama, grafikte görüldüğü gibi, aynı  $y$  için birden fazla  $x$  değeri olabilir. Bu durum, ilişkinin fonksiyon olma durumunu engellemez. Bunun sonucu, standart parabolün bir fonksiyon olduğudur.

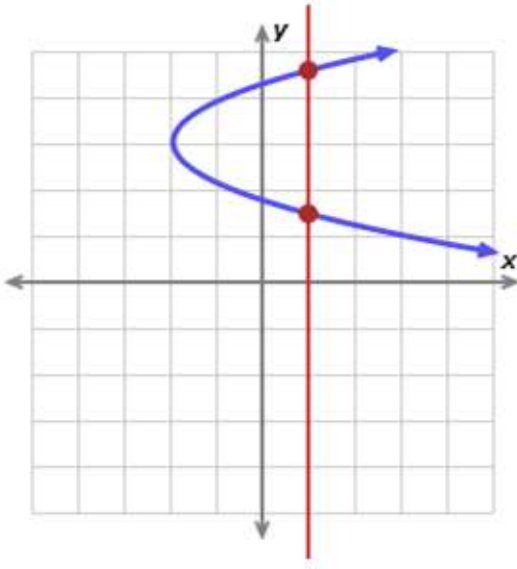
Standart parabol ilişkisi ( $y = x^2$ ) dikey test kriteriyumunu geçmiştir. dolayısı ile bir fonksiyondur.

Oysa,



Yukarıdaki grafiği veren bir ilişki fonksiyon değildir. Çünkü, bir  $x$  değerine karşılık birden çok  $y$  değeri vardır. Dolayısı ile, dikey test kriteriyumunu sağlayamaz ve fonksiyon değildir.

bir başka fonksiyon olmayan ilişki:



Dikey test kriteriyumunu sağlayamıyor. Çünkü, bir  $x$  Bağımsız değişken) değerine karşılık, iki tane  $y$  (bağımlı değişken) değeri veriyor.

## Fonksiyon Notasyonu

Fonksiyonları açıklamak için çeşitli standart yöntemler bulunmaktadır. Bunların en çok kullanılanı, 1735 de Euler tarafından tanımlanan, italik karakterlerle,  $f, g, h, \sin$  gibi harflerle belirtilen,

$$y = f(x)$$

şeklinde bir notasyondur. genellikle italik font yerine düz yazı tipi kullanılmakta ve bu notasyon, günümüzde matematik bilimlerine en yaygın olarak kullanılmaktadır. Bu notasyon, fonksiyonun  $f$  tanım alanında,  $y$  değer alanında sonuç vereceğini belirtir.

Küme yapıcı tanımla,

$$\{(x, f(x)) : x \in X\}$$

giriş ve çıkış veri tipleri belirtilebilir. Bir başka veritipi belirtmesi, ok notasyonunun aşağıdaki şekilde uygulaması ile yapılabilir.

" $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x)$  şeklinde bir fonksiyon olsun"

şeklindeki notasyondur. Bu fonksiyonun girdisinin (Bağımsız Değişken), çıktısının (Bağımlı Değişken) veri türünü belirten bu notasyon, çoğun-

lukla basitleştirilmiş olarak, sadece  $f(x)$  olarak belirtilir. Giriş ve çıkışın veri türü, fonksiyonun yazılımından (içeriğinden) anlaşılır. (En azından anlamaya çalışılır!)

Fonksiyon tanımının, "Ok Notasyonu" uygulanması ile belirtilmesi de yapılabilir.

$$x \mapsto f(x)$$

örnek olarak,  $x^2$

$$x \mapsto x^2$$

Ok notasyonu çok genel değildir, bunun için fazla üstünde durmayacağız, bu konuda literatürde daha geniş bilgi bulunabilir.

Konumuzda ilerledikçe daha fazla fonksiyon örnekleri ile çalışacağız.